



UNIVERZITET U NIŠU
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU



OSNOVI MAŠINSTVA

- PREZENTACIJA BR. 5 -

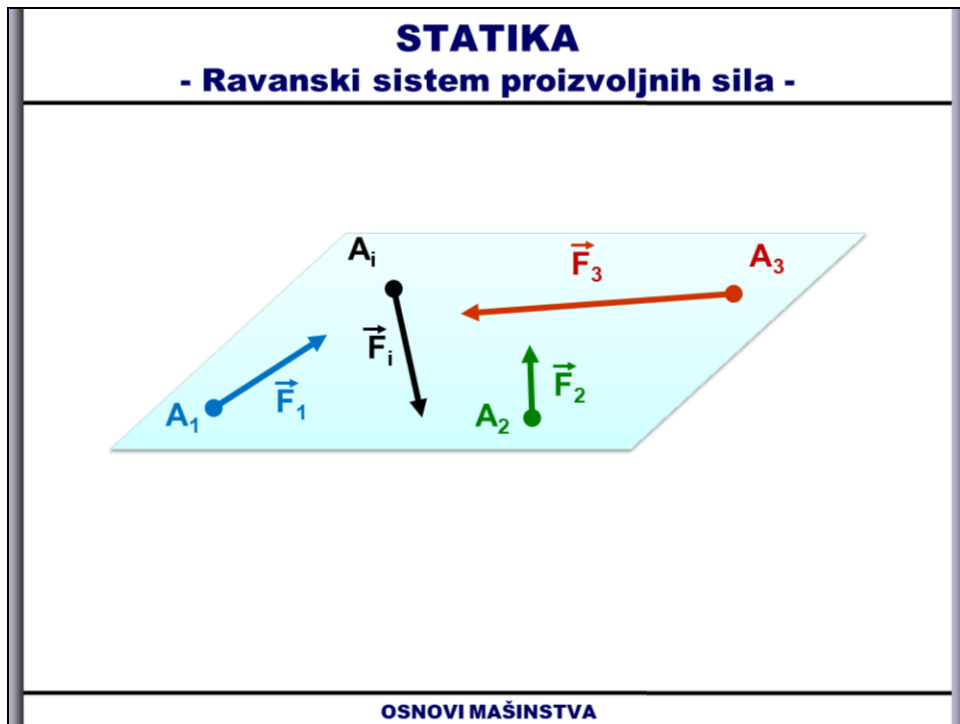
Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.

SADRŽAJ PREZENTACIJE

RAVANSKI SISTEM PROIZVOLJNIH SILA:

- Redukcija sile na tačku;
- Glavni vektor i glavni moment;
- Redukcija ravanskog sistema proizvoljnih sila na datu tačku;
- Slučajevi redukcije ravanskog sistema proizvoljnih sila na datu tačku;
- Ravoteža ravanskog sistema proizvoljnih sila;
- Ravoteža ravanskog sistema paralelnih sila.





Ako sistem sila napada kruto telo u različitim tačkama, pri čemu su napadne linije sila proizvoljno raspoređene u ravni, takav sistem sila se naziva ravanski sistem proizvoljnih sila ili sistem proizvoljnih sila u ravni.

Zadatak Statike je:

1. Da sistem proizvoljnih sila redukuje (svede) na jednostavniji i
2. Da ispita uslove ravnoteže.

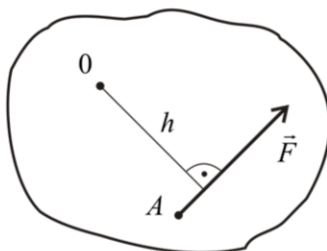
Redukcija (svođenje) sistema sila na jednostavniji oblik se vrši u odnosu na neku tačku (*redukcionu tačku*), koja je najčešće početak Dekartovog koordinatnog sistema.

STATIKA

- Redukcija jedne sile na datu tačku -

REDUKCIJA JEDNE SILE NA DATU TAČKU (1/5)

(1)



$$M_0(\vec{F}) = F \cdot h$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Data je sila F sa napadnom tačkom A i redukciona tačka O na normalnom rastojanju h od napadne linije sile, tako da je moment sile F za redukcionu tačku O jednak $M_0(F)=F \cdot h$.

STATIKA

- Redukcija jedne sile na datu tačku -

REDUKCIJA JEDNE SILE NA DATU TAČKU (2/5)

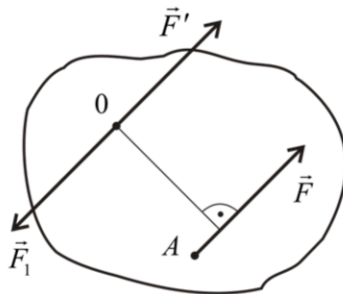
(2)

$$(\vec{F}', \vec{F}_1) \equiv 0$$

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}$$

$$\mathfrak{M} = F \cdot h = M_0(\vec{F})$$



OSNOVI MAŠINSTVA

U redukcionoj tački 0 se po aksiomi (A3) može dodati uravnotežen sistem sila $(F', F_1) = 0$, gde je $F' = F_1$.

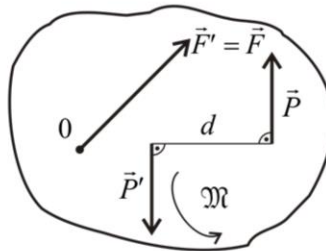
Tada je $F_1 = -F$. Ove sile imaju paralelne napadne linije, te obrazuju spreg sila - redukcionu spreg sila, čiji je moment dat izrazom na slajdu.

STATIKA

- Redukcija jedne sile na datu tačku -

REDUKCIJA JEDNE SILE NA DATU TAČKU (3/5)

(3)



$$\mathfrak{M}(\vec{F}, \vec{F}_1) = \mathfrak{M}(\vec{P}, \vec{P}')$$

OSNOVI MAŠINSTVA

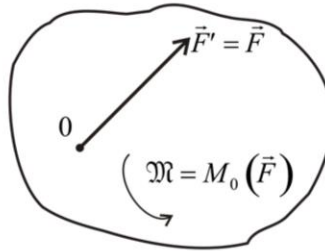
Spreg sila (F, F_1) se na osnovu Teoreme o ekvivalentnosti spregova može predstaviti bilo kojim drugim spregom sila (P, P') u istoj ravni, pod uslovom da su im jednake vrednosti momenata.

STATIKA

- Redukcija jedne sile na datu tačku -

REDUKCIJA JEDNE SILE NA DATU TAČKU (4/5)

(4)



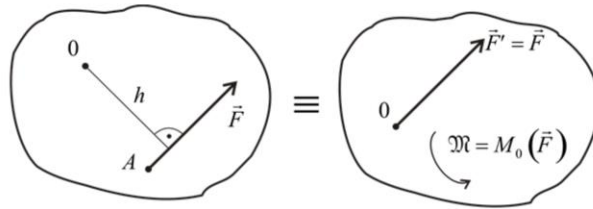
OSNOVI MAŠINSTVA

Redukcioni spreg sile se predstavlja kružnom strelicom u ravni dejstva, tako da strelica prikazuje smer obrtnog dejstva sprega sile.

STATIKA

- Redukcija jedne sile na datu tačku -

REDUKCIJA JEDNE SILE NA DATU TAČKU (5/5)



$$\vec{F}' = \vec{F}$$

$$\mathfrak{M} = F \cdot h = M_0(\vec{F})$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Sila F koja djeluje u tački A krutog tela, statički je ekvivalentna:

- redukcionoj sili F' koja djeluje u redukcionoj tački O i
- redukcionom spregu sile $\mathfrak{M}$.

Redukciona sila F' je po intenzitetu i smeru jednaka datoj sili F i leži na napadnoj liniji koja je paralelna napadnoj liniji sile F .

Redukcioni spreg sile $\mathfrak{M}$ djeluje u ravni koju obrazuju napadna linija sile F i redukciona tačka O i ima moment $\mathfrak{M}$ koji je jednak momentu sile F za redukcionu tačku O .

STATIKA

- Glavni vektor sistema sila -

GLAVNI VEKTOR I GLAVNI MOMENT

$$\vec{F}_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}' &= X_{R'} \vec{i} + Y_{R'} \vec{j}; \quad R' = \sqrt{X_{R'}^2 + Y_{R'}^2}; \\ \cos \alpha_{R'} &= \frac{X_{R'}}{R'}; \quad \cos \beta_{R'} = \frac{Y_{R'}}{R'}; \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} X_{R'} &= \sum_{i=1}^n X_i; \\ Y_{R'} &= \sum_{i=1}^n Y_i; \end{aligned} \right\}$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i)$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Glavni vektor R' je naziv za vektorski zbir svih sila datog sistema proizvoljnih sila $F_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ sa napadnim tačkama A_i .

Glavni vektor R' se analitički definiše izrazima kao što je prikazano.

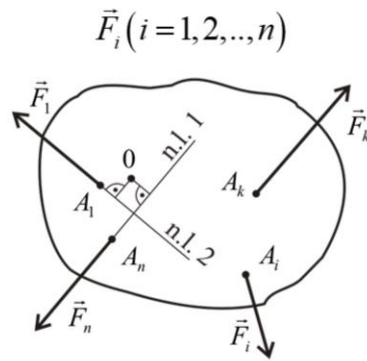
Glavni moment M_0 je naziv za algebarski zbir momenata svih sila ravanskog sistema proizvoljnih sila $F_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ sa napadnim tačkama A_i za redukcionu tačku 0 u istoj ravni.

STATIKA

- Redukcija sistema sila na datu tačku -

REDUKCIJA RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (1/4)

(1)



OSNOVI MAŠINSTVA

Dat je sistem sila $F_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ sa napadnim tačkama A_i i redukciona tačka O .

STATIKA

- Redukcija sistema sila na datu tačku -

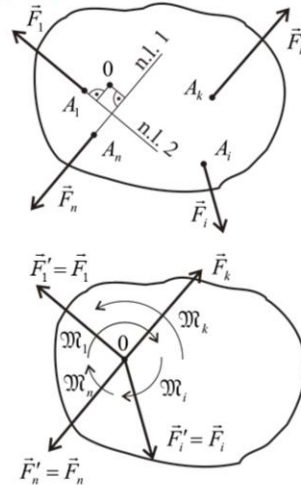
REDUKCIJA RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (2/4)

$$(2) \vec{F}'_i = \vec{F}_i$$

$$\mathfrak{M}_i = F_i \cdot h_i = M_0(\vec{F}_i)$$

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}'$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_R &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{M}_i = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot h_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n M_0(F'_i) = M_0 \end{aligned}$$



OSNOVI MAŠINSTVA

Svaka sila F_i se na osnovu *postupka o redukciji jedne sile na datu tačku* redukuje na datu tačku 0, tako što se zamenjuje silom $F'_i = F_i$ i spregom sila čiji je moment $\mathfrak{M}_i = F_i \cdot h_i = M_0(F_i)$.

Sile F'_i čine sistem sučeljnih sila koje napadaju redukcionu tačku 0 i mogu se primenom *postupka o slaganju sistema sučeljnih sila* zameniti redukcionom rezultantom R^* .

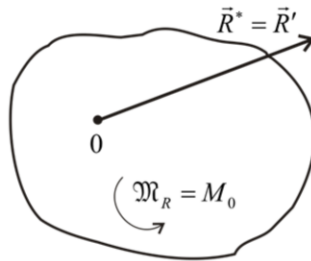
Sistem spregova sila je na osnovu *postupka o slaganju spregova sila* statički ekvivalentan rezultujućem redukcionom spregu, čiji je moment dat poslednjim izrazom na slajdu.

STATIKA

- Redukcija sistema sila na datu tačku -

REDUKCIJA RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (3/4)

(3)



OSNOVI MAŠINSTVA

Zadati sistem sila je sveden na **jednu silu** (redukcionu rezultantu) i **jedan spreg sila** (rezultujući redukcionu spreg sila).

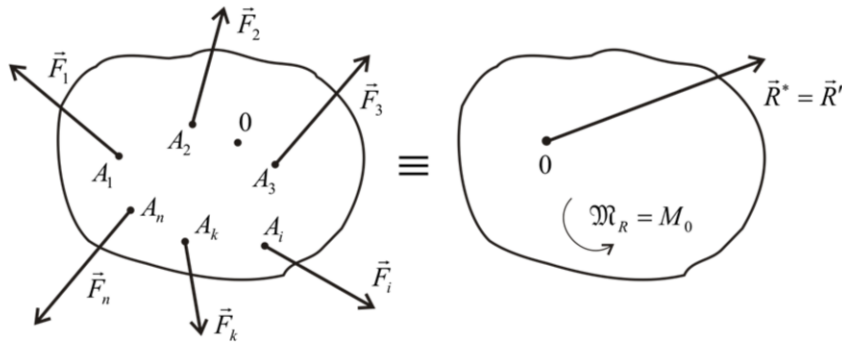
Redukciona rezultanta je jednaka glavnom vektoru i ne zavisi od izbora redukcione tačke.

Moment rezultujućeg redukcionog sprega jednak je glavnom momentu za redukcionu tačku i zavisi od izbora redukcione tačke, jer moment svake sile zavisi od kraka sile koji se menja sa promenom momentne (redukcione) tačke.

STATIKA

- Redukcija sistema sila na datu tačku -

REDUKCIJA RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (4/4)



OSNOVI MAŠINSTVA

Rezime:

Ravanski sistem proizvoljnih sila je statički ekvivalentan:

- ❑ **jednoj sili** - redukcionoj rezultanti R^* , koja je jednaka glavnom vektoru R' ($R^*=R'$), +
- ❑ **jednom spregu sila** - rezultujućem redukcionom spregu sila $\mathfrak{M}_R$, čiji je moment $\mathfrak{M}_R$ jednak glavnom momentu datog sistema proizvoljnih sila M_0 za datu redukcionu tačku O ($\mathfrak{M}_R=M_0$).

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (1/6)

U zavisnosti od vrednosti glavnog vektora i glavnog momenta:

- (1) ravanski sistem sila se svodi na rezultantu,
- (2) ravanski sistem sila se svodi na spreg sila,
- (3) ravanski sistem sila je u ravnoteži.

OSNOVI MAŠINSTVA

Ravanski sistem proizvoljnih sila se može redukovati na prostiji u proizvoljnoj tački O.

U zavisnosti od vrednosti glavnog vektora i glavnog momenta:

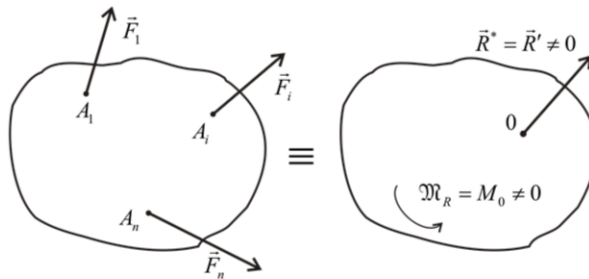
- (1) ravanski sistem sila se svodi na rezultantu,
- (2) ravanski sistem sila se svodi na spreg sila,
- (3) ravanski sistem sila je u ravnoteži.

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (2/6)

(1)



OSNOVI MAŠINSTVA

1. slučaj:

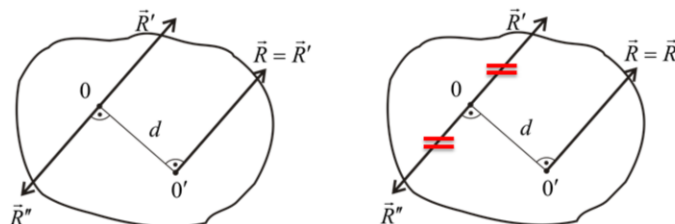
U redukcionoj tački 0 se uoče glavni vektor i glavni moment koji su različiti od nule.

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (3/6)

(1)



OSNOVI MAŠINSTVA

Budući da se spreg sila može prikazati silama sprega, izabere se veličina tih sila sprega tako da budu jednake veličini glavnog vektora.

Spreg se postavi tako da jedna od sila sprega napada redukcionu tačku 0 i ima pravac glavnog vektora a smer suprotan smeru glavnog vektora, a druga sila sprega da napada tačku 0' na rastojanju $d = M_0 / R'$.

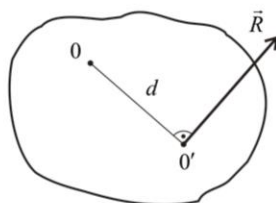
Tada je par sila sa napadnom tačkom u redukcionoj tački 0 po aksiomi (A2) u ravnoteži i po aksiomi (A3) se može ukloniti.

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (4/6)

(1)



OSNOVI MAŠINSTVA

Telo sada napada samo jedna sila u tački O' .

Dakle, početni sistem sila je sveden samo na jednu silu - **rezultantu**.

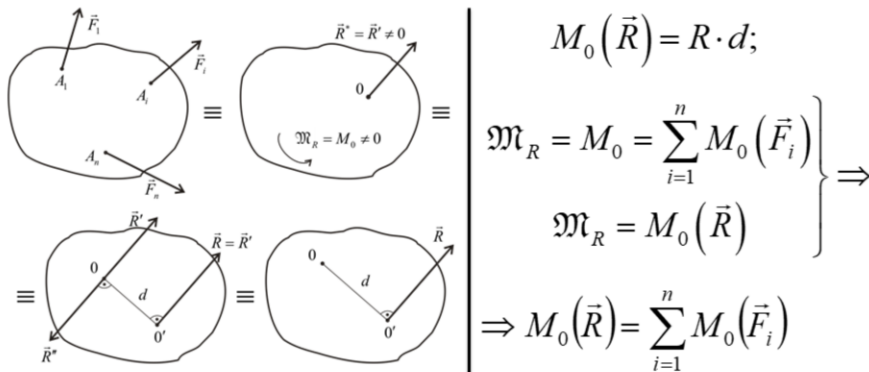
Napadna tačka rezultante se ne poklapa sa redukcionom tačkom O .

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (5/6)

(1) Rezime:



OSNOVI MAŠINSTVA

Na slajdu je prikazan rezime prethodnih operacija pri redukciji ravanskog sistema proizvoljnih sila na datu tačku za slučaj kada su glavni vektor i glavni moment različiti od nule.

Ako su glavni vektor i glavni moment različiti od nule, sistem sila se svodi na rezultantu koja je jednaka glavnom vektoru, ima napadnu tačku O' i napadnu liniju paralelnu napadnoj liniji redukcione rezultante, pomerenu za najkraće rastojanje $d = M_0 / R'$.

Moment rezultante ravanskog sistema proizvoljnih sila za ma koju tačku u toj ravni jednak je algebarskom zbiru momenata datih sila za istu momentnu tačku.

Specijalni slučaj: Ako je glavni vektor različit od nule, a glavni moment jednak nuli, sistem se svodi na rezultantu čija napadna linija prolazi kroz redukcionu tačku O .

2. slučaj:

Ako je glavni vektor jednak nuli, a glavni moment različit od nule, sistem se svodi na spreg sila čiji je moment jednak momentu rezultujućeg redukcionog sprega i ne zavisi od izbora redukcione tačke.

STATIKA

- Slučajevi redukcije sistema sila na tačku -

SLUČAJEVI REDUKCIJE RAVANSKOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA DATU TAČKU (6/6)

- (3) Ako su glavni vektor i glavni moment jednaki nuli,
sistem je u ravnoteži.

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0;$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0$$

OSNOVI MAŠINSTVA

3. slučaj:

Ako su glavni vektor i glavni moment jednaki nuli, sistem je u ravnoteži.

Navedeni uslovi predstavljaju osnovni oblik uslova ravnoteže ravanskog sistema proizvoljnih sila.

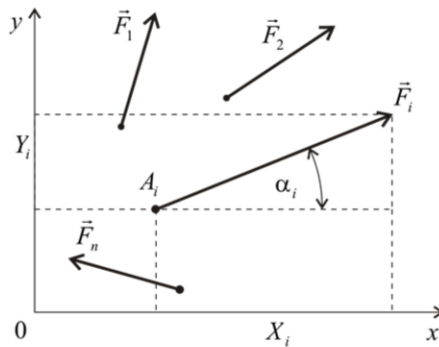
STATIKA

- Ravnoteža ravanskog sistem proizvoljnih sila -

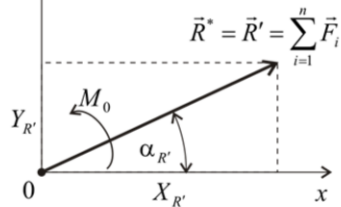
RAVNOTEŽA SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA (1/4)

Uslovi ravnoteže:

$$\vec{R}^* = \vec{R}' = 0, \\ \mathfrak{M}_R = M_0 = 0.$$



≡



Analitički način predstavljanja ravanskog sistema proizvoljnih sila, odgovarajućeg glavnog vektora i glavnog momenta za tačku 0

OSNOVI MAŠINSTVA

Polazi se od osnovnog oblika uslova ravnoteže za sistem proizvoljnih sila u ravni, koji se posmatra u odnosu na pravougli koordinatni sistem Oxy.

STATIKA

- Ravnoteža ravanskog sistem proizvoljnih sila -

RAVNOTEŽA SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA (2/4)

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \\ M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R' = \sqrt{X_{R'}^2 + Y_{R'}^2} = 0; \\ X_{R'} = \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad Y_{R'} = \sum_{i=1}^n Y_i = 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Prvi oblik uslova ravnoteže ravanskog sistema proizvoljnih sila:

$$\Rightarrow \quad (1) \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad (2) \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad (3) \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Za ravnotežu ravanskog sistema proizvoljnih sila je potrebno i dovoljno:

1. da algebarski zbrovi projekcija svih sila na svaku od dve uzajamno upravne koordinatne ose budu jednaki nuli i
2. da algebarski zbir momenata svih sila za proizvoljnu tačku u istoj ravni bude jednak nuli.

STATIKA

- Ravnoteža ravanskog sistema proizvoljnih sila -

RAVNOTEŽA SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA (3/4)

Drugi oblik uslova ravnoteže ravanskog sistema proizvoljnih sila:

$$(1) \sum_{i=1}^n X_i = 0;$$

$$(2) \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$(3) \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Primenjuje se u obliku algebarskog zbira projekcija svih sila sistema na izabranu osu Ox i dve momentne jednačine svih sila za tačke A i B u ravni, čija spojna prava AB nije upravna u odnosu na osu Ox .

STATIKA

- Ravnoteža ravanskog sistema proizvoljnih sila -

RAVNOTEŽA SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA (4/4)

Treći oblik uslova ravnoteže ravanskog sistema proizvoljnih sila:

$$(1) \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0;$$

$$(2) \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0;$$

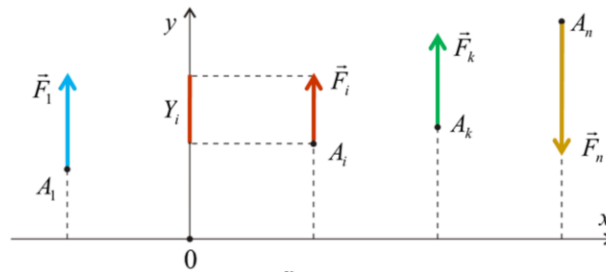
$$(3) \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Primenjuje se u obliku tri momentne jednačine za izabrane tačke u ravni koje ne leže na jednoj pravoj.

STATIKA

- Ravnoteža ravanskog sistem paralelnih sila -



$$(1) \sum_{i=1}^n Y_i = 0,$$

$$(2) \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0,$$

$$\text{jer je: } \sum_{i=1}^n X_i = 0;$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Za ravnotežu **ravanskog sistema paralelnih sila** je potrebno i dovoljno da su ispunjena samo dva uslova u analitičkom obliku, odnosno da su zadovoljene dve jednačine ravnoteže.

Kontrolna pitanja 5



1. Objasniti redukciju jedne sile na datu tačku.
2. Napisati definicije glavnog vektora i glavnog momenta.
3. Objasniti postupak redukcije ravanskog sistema proizvoljnih sila na datu tačku.
4. Nabrojati slučajave redukcije sistema proizvoljnih sila u ravni.
5. Izvesti jednačine ravnoteže sistema proizvoljnih sila u ravni.